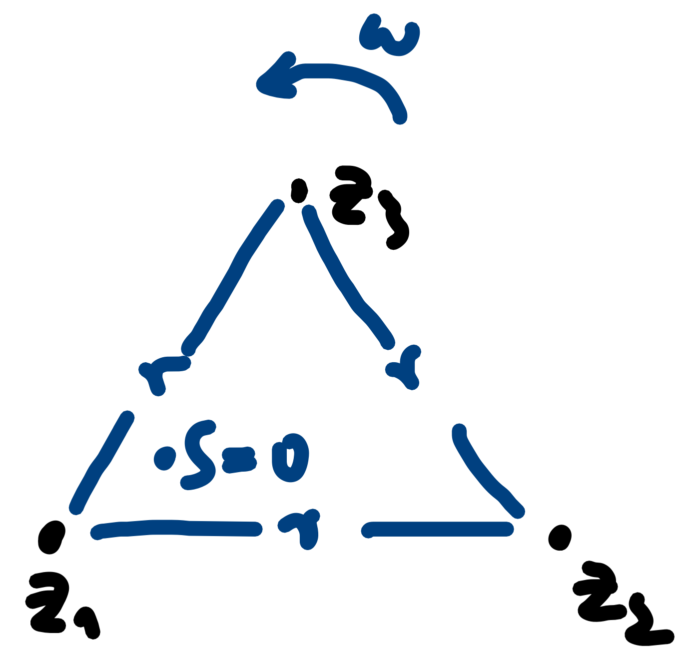
# Vorlesung (5), 27.5.2022

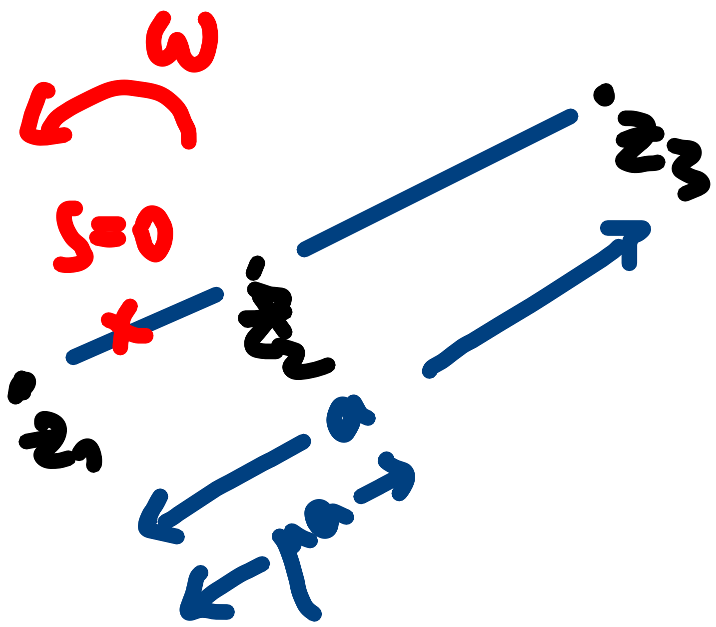
Wh.: Lösungen des 3-Körperproblems nach Lagrange:

(i) gleichseitige Dreieckslösung:




$$\omega^2 r^3 = M = m_1 + m_2 + m_3$$

(ii) kollineare Lösung:



$a>0,\ \mu\in(0,1)$

Frage: Sind diese Lösungen auch stabil?

## §2. Stabilität bei Gleichgewichtslagen

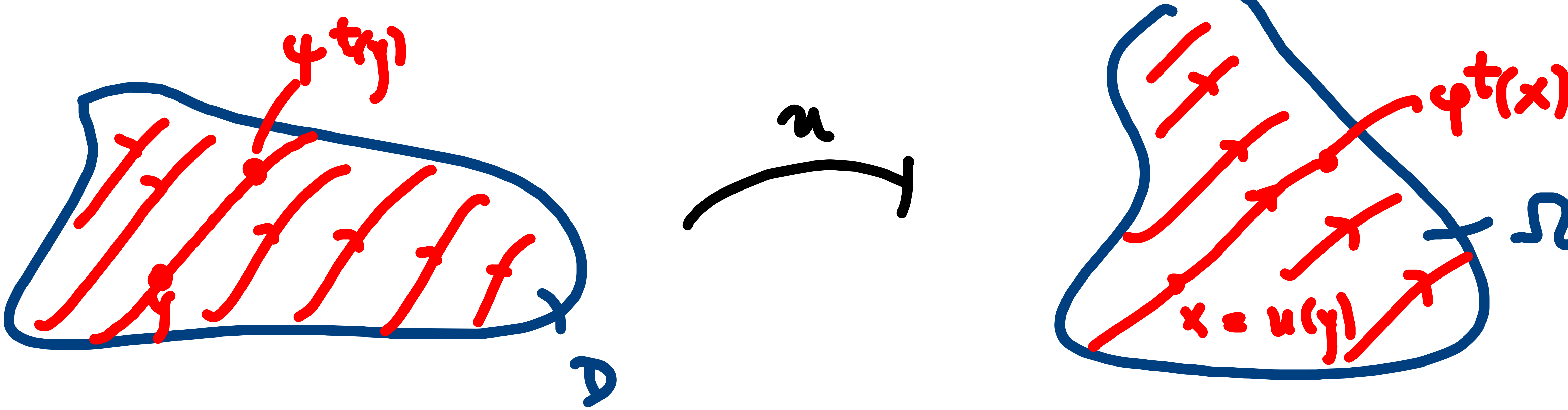
(2.1) Erinnerung. Sei $\varphi=(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ und $(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$

eines auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass $(D,\psi)$ äquivalent zu $(\Omega,\varphi)$ ist, wenn es einen Diffeomorphismus $u: D \to \Omega$ gibt, so dass gilt:

$$I(u(y)) = I(y), \quad \forall y \in D$$

und

$$(*) \qquad u(\psi^t(y)) = \varphi^t(u(y)), \quad \forall t \in I(y), \ \forall y \in D.$$



Frage: In welcher Beziehung stehen dann die zugehörigen Vektorfelder $g: D \to \mathbb{R}^n$ und $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$g(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^t(y), \quad f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(x) \quad ?$$

<u>Rechne:</u>

$$g(y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^t(y) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left( u^{-1} \circ \varphi^t(u(y)) \right)$$

$$= Du^{-1}(\underbrace{\varphi^0(u(y))}_{=u(y)}) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(u(y)) = Du(y)^{-1} \cdot f(u(y))$$

$\Rightarrow$

$$g(y) = Du(y)^{-1} \cdot f(u(y)).$$

Man holt also $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit dem Inversen von $Du(y)$ zurück.

Proposition. Seien $\Omega, D$ Gebiete in $\mathbb{R}^n$ sowie $f, g$ $C^1$ Vektorfelder auf $\Omega$ bzw. $D$. Dann sind die zugehörigen maximalen dynamischen Systeme $\varphi$ von $f$ bzw. $\psi$ von $g$ genau dann äquivalent vermöge eines Diffeomorphismus $u: D \to \Omega$, wenn gilt:

$$Du \circ g = f \circ u .$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Haben wir gerade gezeigt.
„$\Leftarrow$" Ist $y \in D$ fest, so sind sowohl

$$\alpha : I(y) \longrightarrow \Omega, \quad \alpha(t) = u(\varphi^t(y))$$

als auch

$$\beta : I(u(y)) \longrightarrow \Omega, \quad \beta(t) = \varphi^t(u(y))$$

maximale Lösungen von $\dot{x} = f(x)$ auf $\Omega$ zum Anfangswert $x_0 = u(y)$ sind:

$$\dot{\alpha}(t) = Du(\psi^t(y)) \cdot \frac{d}{dt}\psi^t(y)$$

$$= Du(\psi^t(y)) \cdot g(\psi^t(y))$$

$$= f(u(\psi^t(y))) = f(\alpha(t)),$$

$$\alpha(0) = u(\psi^0(y)) = u(y);$$

$$\dot{\beta}(t) = \frac{d\varphi^t}{dt}(u(y)) = f(\varphi^t(u(y))) = f(\beta(t)),$$

$$\beta(0) = \varphi^0(u(y)) = u(y).$$

Die Eindeutigkeit im Satz von Picard-Lindelöf liefert daher: $I(y) = I(u(y))$, $\forall y \in D$, und

$$u \circ \psi^t(y) = \varphi^t \circ u(y), \quad \forall t \in I(y).$$

$\boxed{\phantom{x}}$

Kommentar. (a) Wir nennen daher zwei Vektorfelder $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ äquivalent, wenn Diffeom. $u : D \to \Omega$ gibt mit

$$Du \cdot g = f \circ u.$$

(b) In einer Umgebung von Punkten, die **keine** Gleichgewichtslagen sind, sind alle dynamischen Systeme (mit Freiheitsgrad $n \in \mathbb{N}$) äquivalent:

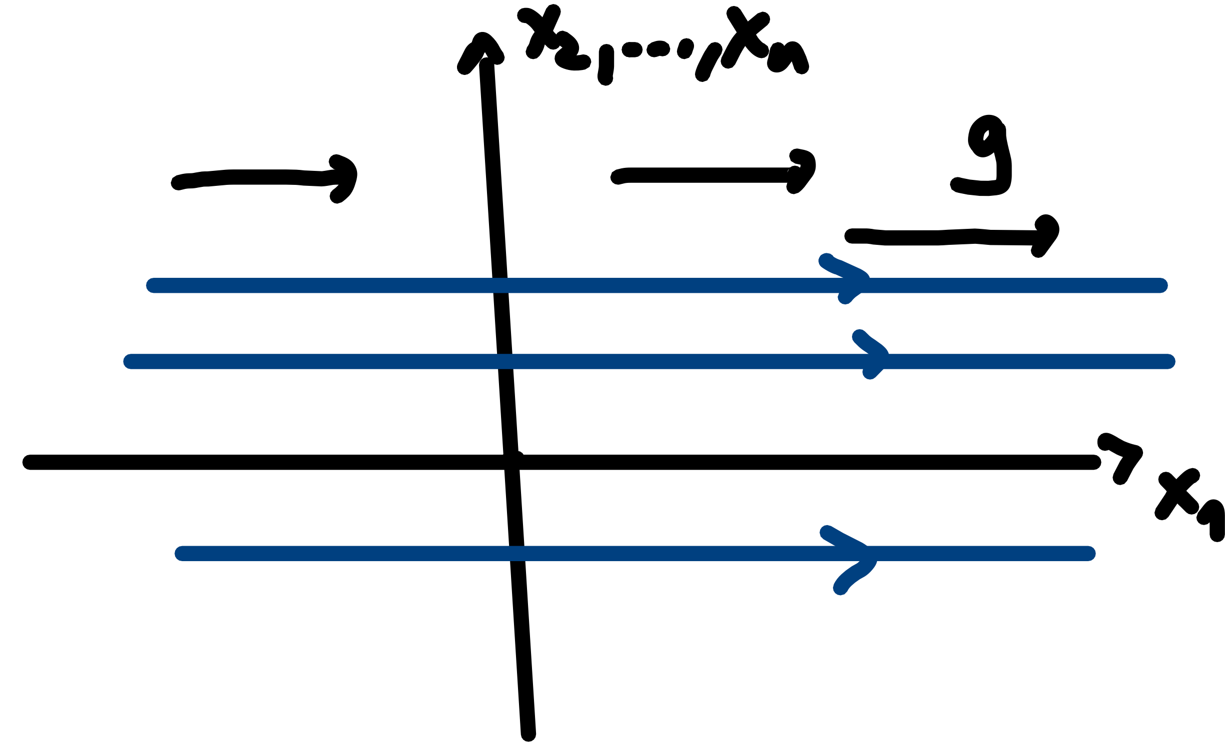
(2.2) Lokale Normalform dynamischer Systeme in einer Umgebung von Nicht-Gleichgewichtslagen

Satz. Seien $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete und $g: D \to \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ $C^1$-Vektorfelder. Seien $y_0 \in D$ und $x_0 \in \Omega$ beliebig mit $g(y_0) \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $V \subseteq D$ von $y_0$ und $U \subseteq \Omega$ von $x_0$, so dass $g^{|V}$ äquivalent zu $f|U$ ist.

Beweis. Wir können annehmen, dass $g$ von einer besonders einfachen Gestalt ist, denn die Äquivalenz von Vektorfeldern ist eine Äquivalenzrelation. Wir nehmen daher an, dass $D = \mathbb{R}^n$, $y_0 = 0$ und

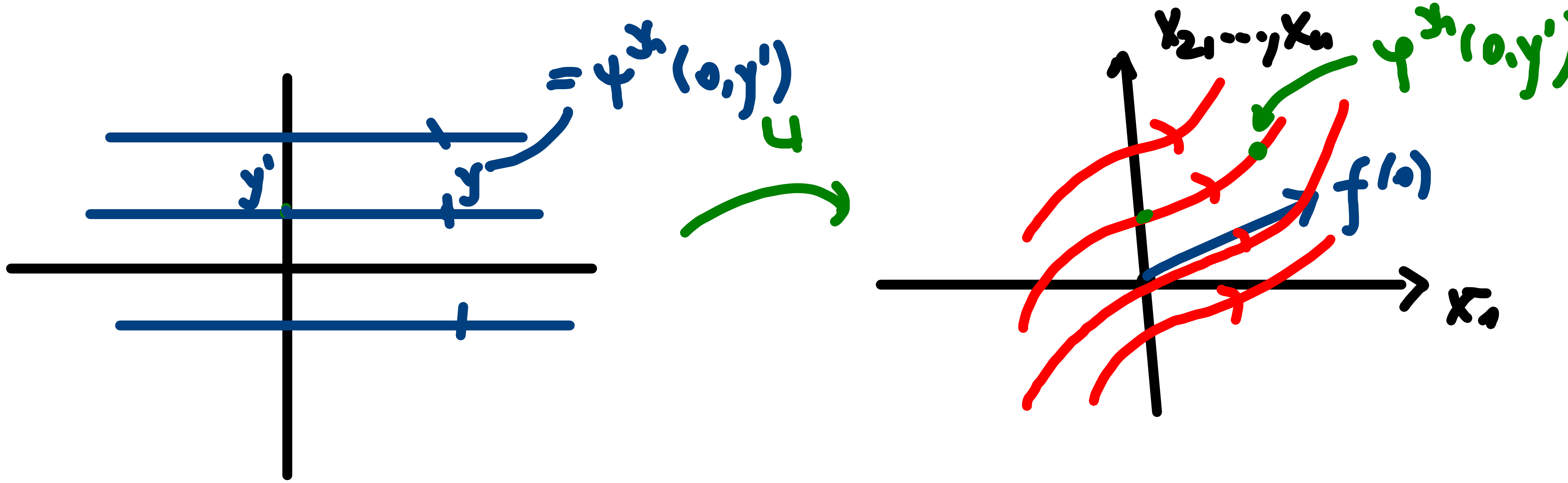
$$g(y) = e_1 = (1, \dots, 0)$$

ist. Wenn $f$ um $x_0$ äquiv. zu $g$ um $y_0$ ist, so ist $f$ auch



zu jedem anderen $h$ um $z_0$ mit $h(z_0) \neq 0$ äquivalent. Den Fluss $(\psi^t)$ von $g$ können wir natürlich explizit angeben:

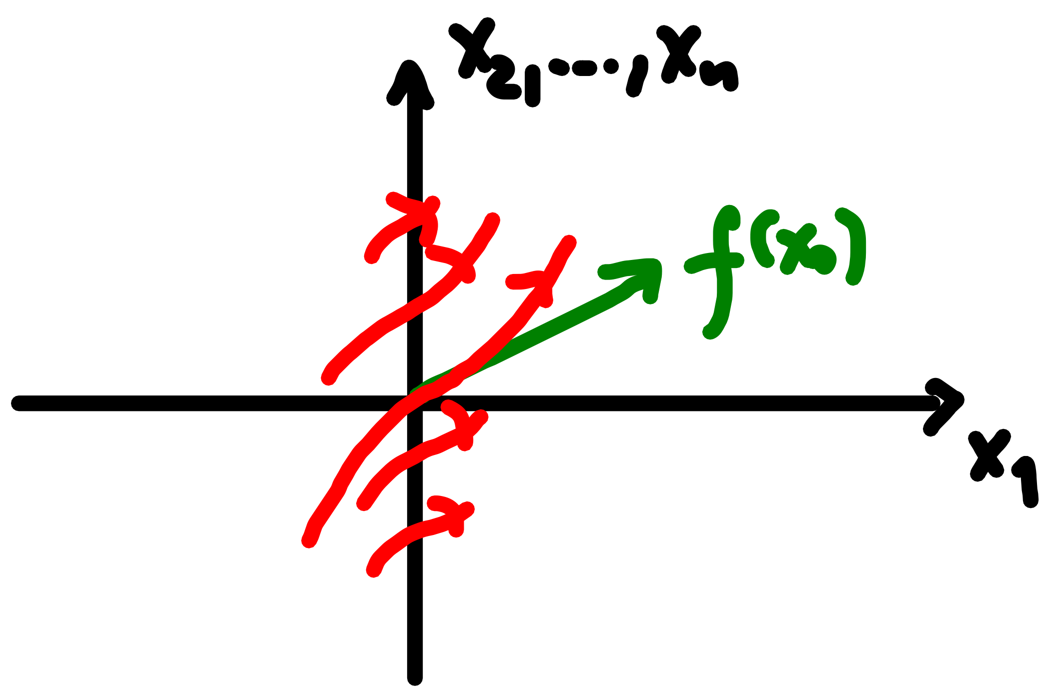
$$\psi^t(y) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_n).$$




$$\dot{y} = g(y)$$

Da $f(x_0) \neq 0$ ist, nehmen wir o.E. $f_1(x_0) \neq 0$ an und auch $x_0 = 0$ (sonst translatiere und drehe $f$ etwas). Dann ist $(\varphi^t)$ lokal um $x_0$ transversal zur Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$




(d.h., $f_1(x) \neq 0$ für alle $x$ um $x_0$)

Wir versuchen nun einen Diffeomorph.
$u: V \to \mathcal{U}$ mit offenen Umg'n $V \subseteq \mathbb{R}^n$
von $y_0$ und $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ von $x_0$ zu finden, die
auf $H \cap \mathcal{U}$ die Identität ist. Es gibt dann wegen der
zu erfüllenden Bedingung

(*) $$u \circ \varphi^t = \psi^t \circ u$$

nur einen Kandidaten, denn für $y \in B_\delta(0)$, $\delta > 0$
klein genug, muss ja mit $y' := (y_2, \dots, y_n)$ folgen:

$$u(y) = u\left(\psi^{y_1}(0, y')\right) \overset{!}{=} \varphi^{y_1}(u(0, y')) = \varphi^{y_1}(0, y')$$

Wir setzen also (bei $\delta > 0$ so klein, dass $\varphi^{y_1}(0,y')$ für $y \in B_\delta(0)$ definiert ist)

$$u(y) := \varphi^{y_1}(0,y').$$

Beachte, dass $u$ jetzt $(*)$ nicht nur für $y = (0,y')$ erfüllt,

$$u(0,y') = \varphi^0(0,y') = (0,y'),$$

$$u \circ \gamma^t(0,y') = u(t,y') = \varphi^t(0,y') = \varphi^t \circ u\,(0,y'),$$

sondern sogar für alle $y \in B_\delta(0)$:

$$u \circ \varphi^t(y) = u(t+y_1, y') = \varphi^{t+y_1}(0,y')$$

$$= \varphi^t \circ \varphi^{y_1}(0,y') = \varphi^t(u(y)).$$

Es bleibt daher zu prüfen, ob $u$, nach evtl. Verkleinerung von $V$ und $U$, ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Dazu reicht es nach dem Umkehrsatz zu prüfen, ob $Du(0) \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ umkehrbar ist. Nun, es ist

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u(t,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(0) = f(0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_k}(0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} u(0,\dots,s,\dots,0)$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi^0(0,\dots,s,\dots,0) = (0,\dots,1,\dots,0) = e_k$$

für $k = 2,\dots,n$. Also ist:

$$Du(0) = \left(\begin{array}{c|ccc} f_1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline f_2(0) & & & \\ \vdots & & \mathbb{1} & \\ f_n(0) & & & \end{array}\right)$$

und damit

$$\det Du(0) = f_1(0) \neq 0.$$

$\blacksquare$

<u>Erinnere</u>. $p \in \Omega$ heißt Gleichgew.-lage von $(\Omega, f)$ falls $I(p) = \mathbb{R}$ und

$$(*) \qquad \varphi^t(p) = p, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent ist: $f(p) = 0$,

denn aus (*) folgt unmittelbar, dass

$$f(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(p) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p = 0$$

rt. Und umgekehrt folgt aus $f(p) = 0$, dass $\alpha : \mathbb{R} \to \Omega$, $\alpha(t) = p$, eine maximale Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = p$$

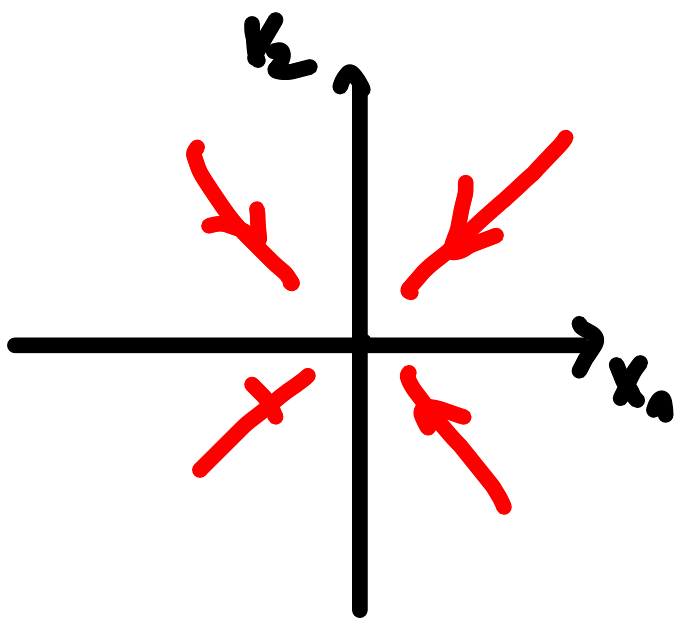
rt.

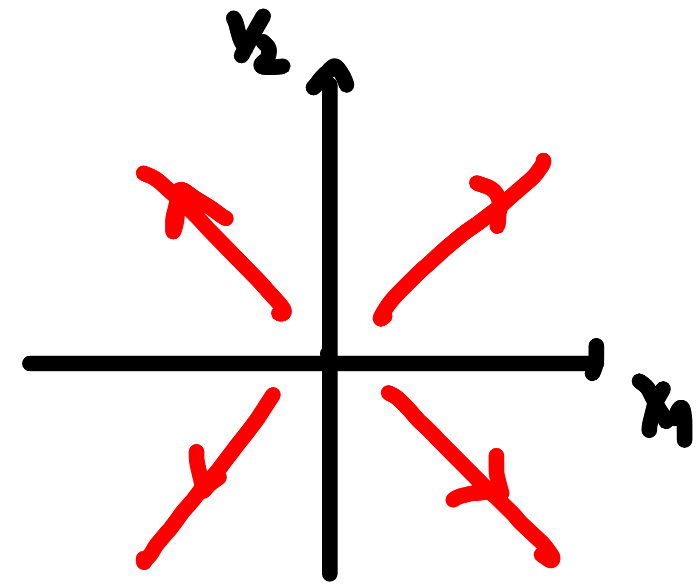
Beobachtung. Nicht alle Gl-lagen können lokal äquivalent sein. z.B wird (auf $\mathbb{R}^2$)

$$\dot{x} = -x \qquad \text{und} \qquad \dot{x} = +x$$

um $x_0 = 0$ nicht äquivalent sein, da der Fluss zu $g(x) = -x$ alles zu $x_0 = 0$ „heranzieht", und der Fluss zu $f(x) = +x$ alles von $x_0 = 0$ „abstößt",

$$\varphi^t(x) = e^{-t}x \qquad \text{und} \qquad \varphi^t(x) = e^{t}x$$




$\lim_{t\to\infty} \varphi^t(x) = 0$

$\lim_{t\to\infty} \varphi^t(x)$ ex. nicht

**Definition.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $C^1$-Vektorfeld und $p \in \Omega$ Gl.-lage, $f(p) = 0$.

(a) Wir nennen dann $p$ *t-stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt, so dass gilt: Für alle $x\in B_\delta(p)$ ist $t_+(x)=\infty$ und es gilt:

$$\|\varphi^t(x)-p\|<\varepsilon \,, \quad \forall t>0$$

(b) Man nennt $p$ *asymptotisch t-stabil* (oder *Attraktor*), wenn $p$ t-stabil ist und außerdem ein $\delta>0$ existiert mit $t_+(x)=+\infty$, für alle $x\in B_\delta(p)$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^t(x)=p.$$